

Étude numérique de la fusion autour d'un cylindre vertical soumis à deux types de conditions limites

Y. K. WU, M. PRUD'HOMME et T. HUNG NGUYEN

Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, C.P.6079 A, Montréal,
Québec, Canada H3C 3A7

(Reçu le 16 Août 1988 et sous forme finale le 14 Février 1989)

Résumé—On étudie ici la fusion autour d'un cylindre circulaire vertical enfoui dans un matériau à changement de phase porté à la température de fusion. Le problème est traité pour deux types de conditions limites à la paroi cylindrique, en supposant des propriétés thermodynamiques constantes. On résout les équations de l'écoulement convectif dans la phase liquide en faisant appel à une technique de génération numérique d'un maillage adapté à la géométrie pour fixer la frontière mobile. L'effet de certaines approximations est examiné et des prédictions numériques sont obtenues pour des nombres de Rayleigh allant jusqu'à $Ra = 7 \times 10^5$ pour une température constante et $Ra = 7 \times 10^8$ pour un flux de chaleur constant. Les résultats présentés pour un nombre de Stefan $\varepsilon = 0,15$ et pour $Pr = 7$ sont pratiquement indépendants de ces paramètres lorsque $\varepsilon < 0,15$ et $Pr > 7$. Pour un flux de chaleur constant, le nombre de Nusselt moyen en régime permanent est proportionnel à $Ra^{1/4}$ et la fusion s'effectue plus lentement que pour une température constante.

1. INTRODUCTION

AU COURS de la dernière décennie, les énergies douces semblaient offrir une alternative fort intéressante aux combustibles fossiles dont l'approvisionnement devenait problématique et le coût de plus en plus élevé. L'énergie solaire était alors particulièrement attrayante et a donné naissance à un nouveau domaine de recherche appliquée en vue de permettre son utilisation à grande échelle. Le besoin de mettre au point un système à chaleur latente pour emmagasiner l'énergie thermique produite par les capteurs solaires a dès lors donné lieu à beaucoup de travaux de recherche sur les problèmes de changement de phase en général. Des besoins plus classiques, comme ceux de la métallurgie par exemple, ont également contribué à susciter de l'intérêt pour le processus de fusion et de solidification d'un matériau en présence d'un écoulement de convection naturelle dans la phase liquide. On compte plusieurs études expérimentales sur le sujet. Parmi les plus récentes, mentionnons entre autres celles de Ho et Viskanta [1], d'Okada [2] et de Webb et Viskanta [3] qui ont étudié la fusion le long d'une paroi isotherme verticale. Les travaux de Ho et Viskanta notamment, ont permis de montrer comment la dilatation qui accompagne le changement de phase de la plupart des matériaux accélère la fonte dans le haut de la cavité. Cet effet se fait surtout sentir au début du processus, alors que le transfert de chaleur est encore dominé par la conduction, et peut exercer une influence aussi importante que celle de la convection naturelle dans certains cas. Les auteurs ont encore constaté qu'un refroidissement préalable du matériau ralentit sensiblement la fusion par la suite.

La fusion à l'intérieur d'une enceinte cylindrique

verticale isotherme a fait l'objet des travaux de Bareiss et Beer [4], tandis que Sparrow *et al.* [5] ont considéré le problème inverse, i.e. la solidification. Dans ce cas, la solidification s'est montrée très sensible aux effets de la convection naturelle lorsque le liquide n'est pas à la température de fusion et peut même s'arrêter complètement. La fusion autour d'un cylindre isotherme, horizontal cette fois, a été étudiée par Goldstein et Ramsey [6] et par Sparrow *et al.* [7]. La fusion s'est avérée encore une fois sensible au refroidissement initial du solide de même qu'aux perturbations des conditions expérimentales. Une tendance générale se dégage des résultats de toutes ces études. Le transfert de chaleur dans la phase liquide est tout d'abord dominé par la conduction et l'interface liquide-solide progresse uniformément. La convection naturelle devient ensuite le principal mécanisme de transfert de chaleur et l'interface se déforme petit à petit à mesure que l'écoulement se développe. La résolution exacte de ce type de problème non-linéaire par des méthodes analytiques présente des difficultés insurmontables. Yao et Chen [8] ont cependant pu établir une solution de perturbations régulières au premier ordre en Ra et ε , pour la fonction de courant et la température, dans le cas de la fusion autour d'un cylindre horizontal avec convection naturelle. Ces solutions ne sont toutefois valables que pour de faibles temps et de faibles nombres de Stefan ($\varepsilon < 0,1$) et l'approche numérique semble donc préférable pour obtenir une solution dans des conditions moins restrictives.

Une simulation numérique efficace de l'écoulement exige donc la solution simultanée des équations de Navier-Stokes, de l'énergie et de la propagation de l'interface liquide-solide dont la forme et la position

NOMENCLATURE

		Symboles grecs
$a_{i,j}$	composantes du tenseur métrique	α diffusivité thermique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
	covariant ($a_{11} = r_\xi^2 + z_\xi^2$;	β coefficient de dilatation volumique
	$a_{12} = r_\xi r_\eta + z_\xi z_\eta$; $a_{22} = r_\eta^2 + z_\eta^2$)	$[\text{K}^{-1}]$
A	rapport de forme du cylindre, h/r_w	Δ accroissement
c	chaleur massique [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$]	ε nombre de Stefan, $c\Delta T/l$
C, D	coefficient et terme source de l'équation aux différences finies	η coordonnée transformée
g	accélération de la gravité [m s^{-2}]	θ température adimensionnelle
h	hauteur du cylindre [m]	ν viscosité cinématique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
J	jacobien, $r_\xi z_\eta - z_\xi r_\eta$	ξ coordonnée transformée
k	conductivité thermique [$\text{J s}^{-1} \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$]	ρ masse volumique [kg m^{-3}]
l	chaleur latente de fusion [J kg^{-1}]	τ temps adimensionnel
L	opérateur	ϕ, φ paramètres
n	direction normale à l'interface liquide-solide	ψ fonction courant [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
\hat{n}	vecteur unitaire selon la normale, (n_r, n_z)	ω vorticité [s^{-1}].
Nu	nombre de Nusselt moyen à la surface du cylindre	
P, Q	termes source pour la transformation de coordonnées	
Pr	nombre de Prandtl, ν/α	
r	coordonnée [m]	
R	position de l'interface liquide-solide	
Ra	nombre de Rayleigh, $\beta\Delta T r_w^3 g/\nu\alpha$	
t	temps	
T	température	
\mathbf{u}	vecteur vitesse, (u, v) [m s^{-1}]	
U^1, U^2	composantes du vecteur vitesse	
	contravariant	
z	coordonnée [m].	
		Indices et exposants
		f valeur à l'interface liquide-solide
		i, j entiers
		w valeur à la paroi.
		Autres symboles
		∇ gradient
		$\nabla \cdot$ divergence
		∇^2 laplacien
		$\hat{\nabla}^2$ laplacien transformé.

sont des inconnues du problème. La plupart des simulations sont basées sur une technique d'immobilisation de l'interface. Ainsi, Saitoh [9] a appliqué une transformation de Landau en deux dimensions pour traiter avec succès la solidification d'un liquide à la température de fusion dans des cavités carrées, triangulaires et elliptiques. Sparrow *et al.* [10] ont appliqué les premiers la transformation de Landau à un problème de changement de phase avec convection en traitant la fusion autour d'un cylindre vertical isotherme. Ces auteurs ont négligé les termes pseudoconvectifs reliés au mouvement de l'interface, ainsi que tous les termes reliés à la pente ou à la courbure de ce dernier dans les équations transformées, afin de simplifier le système à résoudre numériquement. Les calculs ont montré que le nombre de Nusselt moyen le long du cylindre diminue avec le temps, passe ensuite par un minimum, puis augmente à mesure que l'effet de la convection naturelle se fait sentir. Le nombre de Nusselt atteint alors un maximum relatif, pour finalement se stabiliser à une valeur qui dépend du nombre de Rayleigh. Les résultats obtenus sont indépendants des nombres de Prandtl et de Stefan, au

moins pour les valeurs considérées par les auteurs: $\varepsilon < 0,15$ et $Pr > 7$. Le maximum se produit d'autant plus tôt que le nombre de Rayleigh est grand et que le rapport de forme hauteur du cylindre sur rayon est faible. Ho et Viskanta [1] ont adopté la même démarche, mais sans négliger la pente ou la courbure de l'interface, pour simuler la fusion le long d'une paroi verticale. Leurs résultats sont très semblables aux précédents d'un point de vue qualitatif. Les quelques différences entre leurs données expérimentales et leurs prédictions numériques pouvaient être imputées au effets de la dilatation, de la tension de surface, des propriétés non-constantes et possiblement, de la nature non-newtonienne du fluide.

Kroeger et Ostrach [11] ont traité un problème de coulée continue en deux dimensions, avec convection, en appliquant une transformation conforme au domaine de calcul dans chaque phase, puis en résolvant numériquement les équations dans le plan transformé. Rieger *et al.* [12] ont adopté une technique numérique d'immobilisation de l'interface plus flexible qu'une transformation de Landau ou encore qu'une transformation conforme pour simuler la

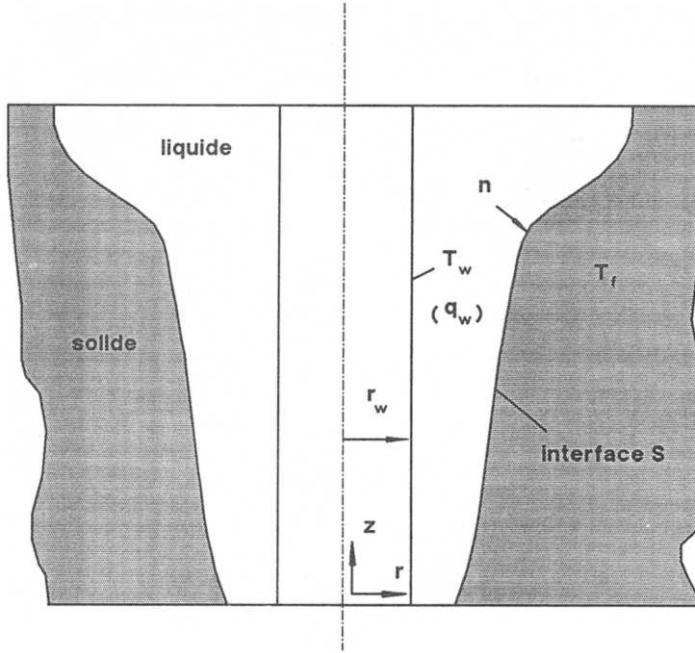


FIG. 1. Géométrie et système de coordonnées.

fusion autour d'un cylindre horizontal isotherme. La technique, proposée par Thompson *et al.* [13], contrairement aux deux méthodes ci-dessus, permet de bien contrôler le maillage générée dans le plan physique tout en gardant un maillage uniforme dans le plan transformé. Les équations transformées ont été résolues en ne négligeant aucun terme, pseudo-convectif ou autre. Les prédictions numériques révèlent les mêmes tendances pour le nombre de Nusselt que celles de [1, 10].

On se propose dans le cadre de cette étude d'appliquer la méthode de génération de maillage employée par Rieger *et al.* au problème représenté à la Fig. 1. Un cylindre circulaire vertical de hauteur h , compris entre deux plans adiabatiques horizontaux, est enfoui dans un matériau solide à changement de phase porté à la température de fusion. La fusion débute à l'instant $t = 0$ alors qu'on impose les conditions thermiques à la surface du cylindre. On envisage deux possibilités, soit (a) : porter le cylindre à une température constante au dessus du point de fusion ou (b) : appliquer un flux de chaleur constant à $r = r_w$. Dans le premier cas, on retrouve le problème de Sparrow *et al.*, de qui permet dans un premier temps de valider le programme de différences finies, puis d'évaluer l'effet des approximations faites par ces auteurs. On considère ensuite le problème de fusion pour un flux de chaleur constant.

2. FORMULATION DU PROBLÈME

Le domaine de l'écoulement est représenté de façon schématique à la Fig. 1. Pour les besoins de l'analyse, on suppose que la phase liquide est un fluide incompressible, de propriétés thermodynamiques con-

stantes, qui satisfait aux conditions de l'approximation de Boussinesq. Si on néglige l'échauffement visqueux, le système d'équations à résoudre prend la forme

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - \frac{\nabla p}{\rho_f} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \left(\frac{\rho}{\rho_f} - 1 \right) \quad (2)$$

$$T_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T. \quad (3)$$

On peut faire ici l'approximation linéaire habituelle

$$\frac{\rho}{\rho_f} = 1 - \beta(T - T_f) \quad (4)$$

qu'on porte ensuite dans (2) afin d'éliminer ρ . Les conditions limites à vérifier sur le contour du domaine de solution sont

$$T_z = 0, \quad \mathbf{u} = 0; \quad z = 0, h \quad (5a)$$

$$T = T_f, \quad \mathbf{u} = 0; \quad r = r_f \quad (5b)$$

et

$$T = T_w \quad \text{ou} \quad -k T_r = Q, \quad \mathbf{u} = 0; \quad r = r_w \quad (5c)$$

selon qu'on spécifie une température constante ou un flux de chaleur constant à $r = r_w$. Pour ces conditions le problème possède une symétrie axiale et l'écoulement est alors bidimensionnel. On peut réduire dans ce cas le système (1)–(3) à un système d'équations scalaires. Le gradient de pression s'élimine en prenant le rotationnel de (2). On obtient alors une équation pour la vorticité, soit

$$\omega_r + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega - \frac{u\omega}{r} = v \left(\nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + g\beta T_r \quad (6)$$

où par définition

$$\omega = v_r - u_z. \quad (7)$$

Les composantes du vecteur vitesse et la vorticité peuvent s'exprimer en termes d'une fonction courant ψ

$$u = \frac{1}{r} \psi_z \quad (8a)$$

$$v = -\frac{1}{r} \psi_r \quad (8b)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{2}{r} \psi_r - r\omega \quad (8c)$$

de sorte que l'équation (1) est toujours automatiquement vérifiée. Il est souhaitable toutefois de traiter le problème sous forme adimensionnelle en définissant de nouvelles variables à cet effet à l'aide de

$$(r, z)' = (r, z)/r_w, \quad (u, v)' = (u, v)r_w/\alpha, \quad \tau = \varepsilon \alpha t r_w^2$$

$$\omega' = r_w^2 \omega/\alpha, \quad \psi' = \psi/\alpha r_w, \quad \theta = (T - T_f)/\Delta T \quad (9)$$

où ΔT vaut $T_w - T_f$ ou bien Qr_w/k selon le cas. Les équations (3) et (6) retransformées s'écrivent, en omettant dorénavant les symboles primés pour alléger l'écriture

$$\varepsilon \theta_\tau + u \theta_r + v \theta_z = \nabla^2 \theta \quad (10)$$

$$\varepsilon \omega_\tau + u \omega_r + v \omega_z - \frac{u \omega}{r} = Pr \left(\nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + Pr Ra \theta_r. \quad (11)$$

L'équation (8c) demeure identique.

La position et la forme de l'interface liquide-solide ne sont pas spécifiées au départ. Néanmoins leur évolution est régie par une relation simple basée sur un bilan d'énergie thermique à l'interface. En supposant qu'il n'y a pas de variation de la masse volumique du matériau lors du changement de phase, le bilan donne

$$\rho / \mathbf{R}_t = -k T_n \hat{\mathbf{n}} \quad (12)$$

pour la vitesse de déplacement de la frontière en chaque point. Sous forme adimensionnelle cette relation peut se décomposer en

$$r_\tau = -\theta_n n_r \quad (13a)$$

$$z_\tau = -\theta_n n_z \quad (13b)$$

qu'il suffit d'intégrer pour déterminer la progression de l'interface en fonction du temps.

3. MÉTHODE DE SOLUTION

3.1. Technique de maillage numérique

Une simulation numérique efficace de l'écoulement ne saurait être envisagée sans une application précise des conditions limites sur toutes les frontières du

domaine de calcul, y compris l'interface liquide-solide. La qualité des solutions dépendra aussi dans une large mesure de la finesse du maillage au voisinage des frontières s'il y a formation d'une couche limite. Ces raisons militent en faveur de l'emploi d'un maillage adapté à la géométrie du problème, qui permet une localisation précise des frontières, et l'application naturelle des conditions limites. En outre, la répartition des noeuds doit suivre la déformation progressive du domaine de l'écoulement afin de maintenir des noeuds sur la frontière mobile tout au long du processus de fusion. Le maillage est généré numériquement à chaque pas de calcul dans le temps selon la méthode générale de transformation de coordonnées de Thompson *et al.* [13]. La transformation s'effectue via la solution numérique d'un problème de valeurs aux limites de type elliptique.

L'idée de base mise de l'avant par cette méthode est que les nouvelles coordonnées obéissent à une équation de Poisson

$$\xi_{rr} + \xi_{zz} = P \quad (14a)$$

$$\eta_{rr} + \eta_{zz} = Q \quad (14b)$$

où P et Q sont des termes sources visant à contrôler le maillage. Ces équations peuvent également s'exprimer en utilisant ξ , η comme variables indépendantes, ce qui donne

$$a_{22} r_{\xi\xi} - 2a_{12} r_{\xi\eta} + a_{11} r_{\eta\eta} = -J^2 (Pr_\xi + Qr_\eta) \quad (15a)$$

$$a_{22} z_{\xi\xi} - 2a_{12} z_{\xi\eta} + a_{11} z_{\eta\eta} = -J^2 (Pz_\xi + Qz_\eta). \quad (15b)$$

Ce système peut ensuite être résolu par différences finies pour trouver les coordonnées images (r_{ij}, z_{ij}) d'un noeud (ξ_i, η_j) à partir des conditions limites spécifiées sur le contour du rectangle de la Fig. 2. Ces conditions ne sont rien d'autre que les coordonnées de points quelconques sur la frontière dans le plan (r, z) qu'on assigne comme images aux noeuds situés sur le contour du rectangle. On génère ainsi le maillage curviligne non-orthogonal du plan (r, z) à partir du maillage rectangulaire uniforme du plan (ξ, η) . Pour un domaine simplement connexe il est possible d'avoir recours à une simplification proposée par Thomas et Middlecoff [14] qui évite d'avoir à choisir les termes sources de façon arbitraire. On définit pour cela deux paramètres ϕ et φ à l'aide de

$$P = \phi(\xi, \eta)(\xi_r^2 + \xi_z^2) \quad (16a)$$

$$Q = \varphi(\xi, \eta)(\eta_r^2 + \eta_z^2) \quad (16b)$$

et l'équation (15) devient alors

$$a_{22}(r_{\xi\xi} + \phi r_{\xi\eta}) - 2a_{12}r_{\xi\eta} + a_{11}(r_{\eta\eta} + \varphi r_\eta) = 0 \quad (17a)$$

$$a_{22}(z_{\xi\xi} + \phi z_{\xi\eta}) - 2a_{12}z_{\xi\eta} + a_{11}(z_{\eta\eta} + \varphi z_\eta) = 0. \quad (17b)$$

On peut ensuite éliminer l'un des deux paramètres ci-dessus, disons φ , pour établir une relation en ϕ seulement. L'expression qui en résulte peut se simplifier sur les frontières $\eta = 0$, A en supposant que les courbes à ξ constant intersectent ces frontières à angle

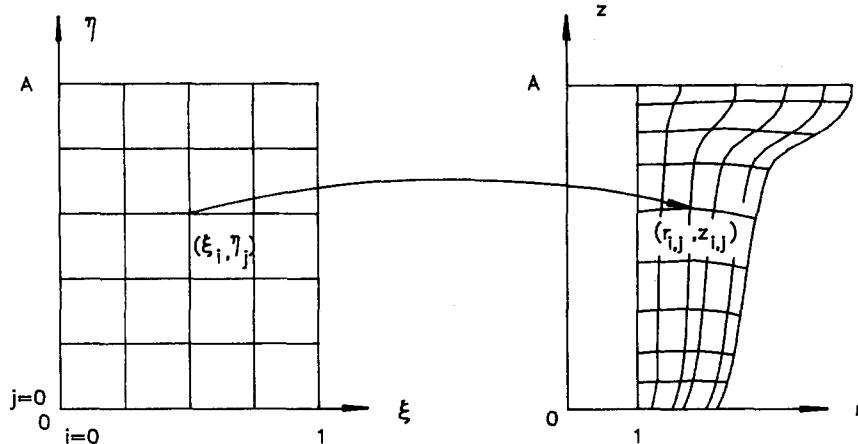


FIG. 2. Transformation des coordonnées.

droit avec une courbure nulle. On obtient après simplification le résultat

$$\phi = -(r_\xi r_{\xi\xi} + z_\xi z_{\xi\xi})/(r_\xi^2 + z_\xi^2) \quad (18)$$

qui permet d'évaluer ϕ sur $\eta = 0$, A directement à partir des conditions limites en r et z . On démontre de la même façon en éliminant ϕ cette fois que

$$\varphi = -(r_\eta r_{\eta\eta} + z_\eta z_{\eta\eta})/(r_\eta^2 + z_\eta^2) \quad (19)$$

sur les frontières $\xi = 0, 1$. Il suffit ensuite de faire une interpolation linéaire à ξ constant entre $\eta = 0$ et A pour assigner une valeur au paramètre ϕ n'importe où à l'intérieur du rectangle. On évalue φ de la même manière en interpolant selon ξ cette fois. Une fois cette opération effectuée, on peut résoudre les équations (17a) et (17b) par différences finies pour trouver les valeurs nodales de r et z et générer par le fait même le maillage adapté. Thomas et Middlecoff ont montré que cette approche permet de bien contrôler le maillage. La distribution des noeuds à l'intérieur du domaine de calcul est déterminée, dans une large mesure, par la distribution des noeuds sur la frontière, qui est choisie à priori.

L'intégration de l'équation (13a) et (13b) permet en principe de déterminer le front de solidification à l'instant $\tau + \Delta\tau$ à partir de la position des noeuds à l'instant τ . Cependant les noeuds ont tendance avec le temps soit à converger vers un point, soit à diverger, comme le mentionnaient Rieger *et al.* [12]. Une simple redistribution des noeuds sur le front de solidification à chaque étape de calcul dans le temps permet d'éviter une trop grande distortion du maillage. La redistribution fait appel à une interpolation par splines cubiques le long de la frontière.

3.2. Transformation des équations

La transformation a pour effet d'immobiliser l'interface à $\eta = 1$ dans le nouveau système de coordonnées, ce qui permet de traiter le problème dans le domaine fixe $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < A$ tout au long du processus de fusion. Le passage du système (r, z) au système (ξ, η) s'effectue en posant $r = r(\xi, \eta, t)$ et z

$= z(\xi, \eta, t)$ dans les équations (8c), (10) et (11). On établit ainsi la règle de correspondance

$$f_r = L^z f \quad (20a)$$

$$f_z = -L^r f \quad (20b)$$

$$\frac{Df}{D\tau} = f_\tau - L^z f_{r\tau} + L^r f_{z\tau} \quad (20c)$$

pour les dérivées premières d'une fonction scalaire f où, suivant la notation compacte de Rieger *et al.* [12]

$$L^r f = (f_\eta F_\xi - f_\xi F_\eta)/J. \quad (21)$$

L'approximation quasi-stationnaire faite par [1, 10] consiste à négliger les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (20c). Les règles de transformation des dérivées secondes sont passablement complexes. On peut se simplifier la tâche en utilisant quelques résultats du calcul tensoriel qui sont valides dans n'importe quel système de coordonnées. Ainsi pour les termes d'advection on peut écrire

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) f = U^1 f_\xi + U^2 f_\eta. \quad (22)$$

Les composantes U^1 , U^2 du vecteur vitesse contravariant dans le système (ξ, η) sont données par

$$U^1 = (u z_\eta - v r_\eta)/J \quad (23a)$$

$$U^2 = (v r_\xi - u z_\xi)/J. \quad (23b)$$

Les termes de diffusion peuvent s'exprimer comme suit :

$$J \nabla^2 f = \left(\frac{a_{22}}{J} f_\xi \right)_\xi - \left(\frac{a_{12}}{J} f_\xi \right)_\eta - \left(\frac{a_{12}}{J} f_\eta \right)_\xi + \left(\frac{a_{11}}{J} f_\eta \right)_\eta. \quad (24)$$

On peut développer cette expression, en changeant de symbole pour le laplacien afin d'éviter toute confusion, pour obtenir compte tenu de l'équation (17a) et (17b)

$$\hat{\nabla}^2 f = J^{-2} [a_{22}(f_{\xi\xi} + \phi f_{\xi}) - a_{12}f_{\xi\eta} + a_{11}(f_{\eta\eta} + \phi f_{\eta})]. \quad (25)$$

Les équations (8a), (8b), (20)–(23) et (25) permettent de reformuler le système d'équations (8c), (10) et (11) en termes des nouvelles variables

$$\varepsilon \frac{D\omega}{Dt} + \frac{1}{r} L^\psi \omega = Pr \left(\hat{\nabla}^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + L^\psi r \frac{\omega}{r^2} + Pr Ra L^z \theta \quad (26)$$

$$\varepsilon \frac{D\theta}{Dt} + \frac{1}{r} L^\psi \theta = \hat{\nabla}^2 \theta \quad (27)$$

$$\hat{\nabla}^2 \psi = \frac{2}{r} L^z \psi - r\omega. \quad (28)$$

On voit que le nombre de Stefan n'apparaît que devant les dérivées par rapport au temps. Par conséquent, la solution du problème dans la cavité est à chaque instant la solution permanente dans une cavité fixe identique, pourvu que le nombre de Stefan soit suffisamment petit. La fonction courant doit vérifier la condition limite suivante

$$\psi = 0; \quad \xi = 0, 1, \quad \eta = 0, A. \quad (29)$$

La condition de glissement nul aux parois entraîne que $\psi_\xi = \psi_\eta = 0$ localement, ce qui permet de déduire de l'équation (28) les conditions

$$\omega = -\frac{a_{11}}{J^2 r} \psi_{\eta\eta}; \quad \eta = 0, A \quad (30a)$$

$$\omega = -\frac{a_{22}}{J^2 r} \psi_{\xi\xi}; \quad \xi = 0, 1 \quad (30b)$$

pour la vorticité. Les conditions (5a)–(5c) deviennent, compte tenu de l'orthogonalité locale du système de coordonnées

$$\theta_\eta = 0; \quad \eta = 0, A \quad (31a)$$

$$\theta = 0; \quad \xi = 1 \quad (31b)$$

$$\theta = 1 \quad \text{ou} \quad \theta_\xi = -a_{11}^{1/2}; \quad \xi = 0. \quad (31c)$$

Il reste encore à transformer les équations (13a) et (13b) qui deviennent

$$r_\tau = -\frac{z_\eta \theta_\xi}{J} \quad (32a)$$

$$z_\tau = \frac{r_\eta \theta_\xi}{J}. \quad (32b)$$

3.3. Solution par différences finies

La simulation numérique de l'écoulement est basée sur la solution par différences finies du système d'équations transformées dans le nouveau système de coordonnées. La discréttisation est simplifiée au maximum par l'uniformité du maillage dans le plan (ξ, η) . L'algorithme de solution employé ici pour solutionner le problème utilise l'approximation quasi-statique qui consiste à résoudre les équations pour ω , θ , ψ à chaque nouvelle étape de calcul dans le temps à

partir de la position de l'interface à la fin de l'étape précédente, puis à trouver seulement ensuite la nouvelle position de l'interface. On adopte une formulation implicite dans le temps pour discréttiser le système d'équations transformées. Les dérivées par rapport au temps sont par conséquent discréttisées selon le schéma des différences arrières du premier ordre. Les termes d'advection de l'équation (26) pour la vorticité et de l'équation (27) pour la température sont discréttisés selon le schéma upwind du second ordre afin d'assurer la stabilité numérique du système durant les calculs. Les termes pseudo-convectifs et les membres de droite des équations (26) et (27), de même que l'équation (28), sont tous discréttisés selon le schéma classique des différences centrales pour un maillage uniforme.

Les équations aux différences finies peuvent s'écrire, en regroupant les termes de façon appropriée, disons par exemple à j constant, sous la forme générale

$$(Cf)_{i-2j} + (Cf)_{i-1j} + (Cf)_{ij}$$

$$+ (Cf)_{i+1j} + (Cf)_{i+2j} = D_{ij} \quad (33)$$

qui conduit à un système pentadiagonal à résoudre par la méthode de Galpin et Raithby [15]. Si les coefficients C_{i-2j} et C_{i+2j} sont nuls, comme c'est le cas pour la fonction de courant, on retrouve un système tridiagonal, qui peut se résoudre par la méthode classique de Thomas. On obtient le nouveau champ de valeurs pour f en résolvant l'équation (33) sur chaque rangée de noeuds. Il est possible de regrouper les termes à i constant et d'effectuer plutôt un balayage selon la verticale.

Les calculs s'effectuent dans l'ordre suivant. A chaque étape de calcul dans le temps, on génère un nouveau maillage et celui-ci est gardé en mémoire afin de calculer les termes r_τ et z_τ à l'étape suivante. On procède ensuite par itérations pour déterminer les nouveaux champs de valeurs pour chaque quantité. On effectue un balayage complet du domaine de calcul pour l'équation de la vorticité, puis celle de la température, et ensuite celle de la fonction de courant. On répète l'opération jusqu'à ce que les calculs aient convergé, en alternant les balayages à j constant avec des balayages à i constant. On solutionne ensuite les équations (32a) et (32b) pour déterminer la nouvelle position de la frontière mobile et on redistribue les noeuds sur l'interface. On passe ensuite à l'étape suivante.

Les calculs ont été effectués pour un maillage de 21 noeuds selon ξ par 31 noeuds selon η sur un ordinateur IBM 4831. Pour un cas typique de $Ra = 7 \times 10^4$, le pas de calcul Δt était de 0,001. Il faut alors compter de 40 à 45 itérations par étape en moyenne pour obtenir une solution convergée. Le temps de calcul est de 2000 s de CPU environ pour 280 pas de calcul dans le temps.

4. RÉSULTATS

4.1. Température constante

Tous les résultats présentés dans cette section ont été calculés pour un nombre de Stefan de 0,15, un

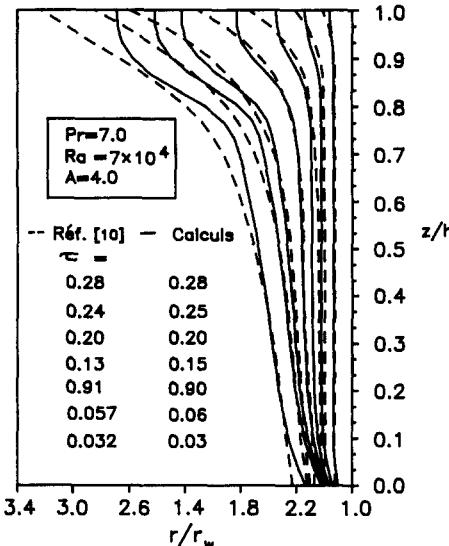


FIG. 3. Position de l'interface, $Ra = 7 \times 10^4$. Température imposée à la paroi.

nombre de Prandtl de 7 et un rapport de forme de 4. Ces valeurs correspondent à celles q'ont adoptées Sparrow *et al.* [10] et sont typiques de celles qu'on retrouve chez les autres auteurs [1, 12]. Il est intéressant de comparer dans un premier temps la technique de maillage numérique utilisée ici avec celle de Sparrow *et al.* avant de faire d'autres calculs. Les Figs. 3 et 4 permettent de comparer les deux méthodes pour un nombre de Rayleigh de 7×10^4 . La Fig. 3 donne la forme et la position de l'interface liquide-solide pour différentes valeurs de τ . Les courbes en traits pleins correspondent aux résultats de cette étude et les courbes en traits pointillés aux résultats de Sparrow *et al.* [10]. L'accord entre les deux solutions est très satisfaisant au centre de la cavité, mais moins bon vers le haut, où l'écart entre les deux familles de courbes devient sensible avec le temps. On peut affirmer que la condition adiabatique à $z = h$ semble mieux respectée ici que dans le cas de Sparrow *et al.* La normale à l'interface doit être parallèle au gradient de température local d'après l'équation (12), aussi

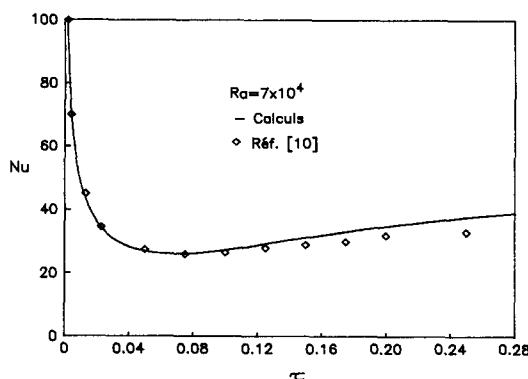


FIG. 4. Nombre de Nusselt moyen, $Ra = 7 \times 10^4$. Température imposée à la paroi.

l'interface devrait-elle intersecter la frontière adiabatique à angle droit.

La Fig. 4 donne le nombre de Nusselt moyen sur la paroi cylindrique en fonction de τ . Ce nombre est défini comme

$$Nu = \frac{1}{A} \int_0^A -\theta_r|_{r=1} dz. \quad (34)$$

Les résultats des deux méthodes sont à toutes fins identiques pour les faibles valeurs de τ alors que le nombre de Nusselt diminue de façon marquée. Cette situation correspond à un régime où le transfert de chaleur est encore dominé par la conduction [1, 10, 12]. Pour le régime convectif, i.e. pour de plus grandes valeurs de τ , l'écart est perceptible sans être vraiment important. Ceci n'est pas surprenant si l'on songe que le nombre de Nusselt tel que défini ci-dessus représente une moyenne prise sur toute la hauteur du cylindre, de sorte que les écarts en haut de la cavité se trouvent plus ou moins compensés par le bon accord ailleurs.

Les Figs. 6 and 7 permettent d'apprécier l'effet des approximations de quasi-stationnarité et de courbure nulle de Sparrow *et al.* sur les prédictions numériques. La première approximation consiste à négliger tous les termes reliés au mouvement de l'interface dans les

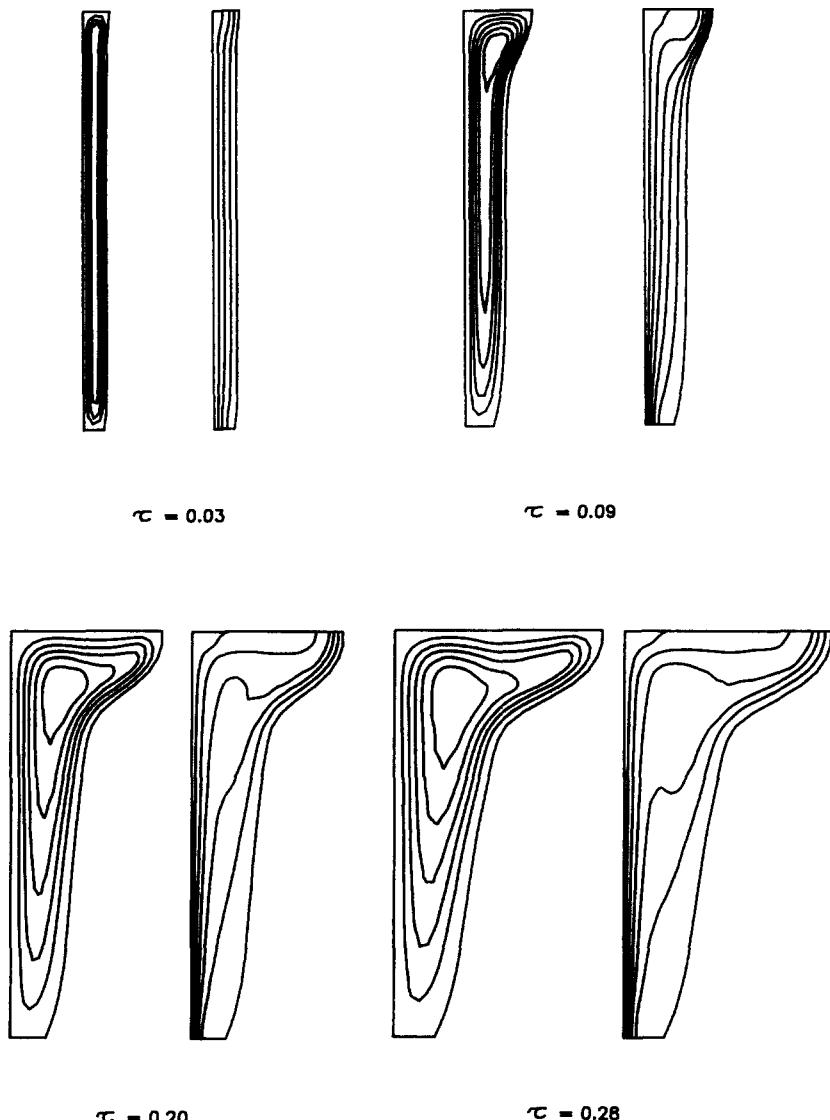


FIG. 5. Isothermes et lignes de courant, $Ra = 7 \times 10^4$. Température imposée à la paroi.

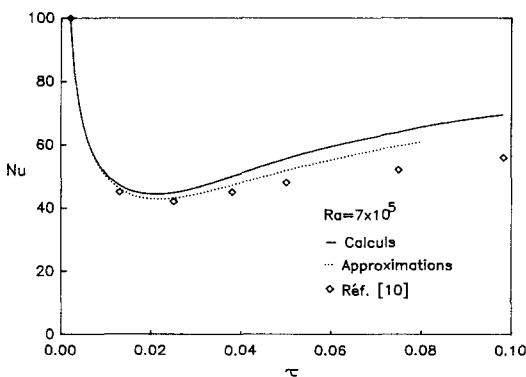


FIG. 6. Nombre de Nusselt moyen, $Ra = 7 \times 10^5$. Température imposée à la paroi.

équations transformées, i.e. les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (20c). La seconde consiste à négliger toutes les dérivées du profil de l'interface par rapport à z , ce qui revient à poser ici $r_\eta = 0$ dans le coefficients a_{ij} , dans le jacobien, puis dans les équations (20)–(24) pour la transformation des dérivées. L'équation (25) ne tient plus. La Fig. 6 donne le nombre de Nusselt moyen en fonction du temps pour un nombre de Rayleigh de 7×10^5 . Les courbes en traits pointillés et pleins indiquent respectivement les solutions calculées avec et sans les approximations. Les deux solutions se confondent en régime conductif et redonnent les résultats de Sparrow *et al.* En régime convectif par contre, l'écart entre les résultats de Sparrow *et al.* et la solution sans

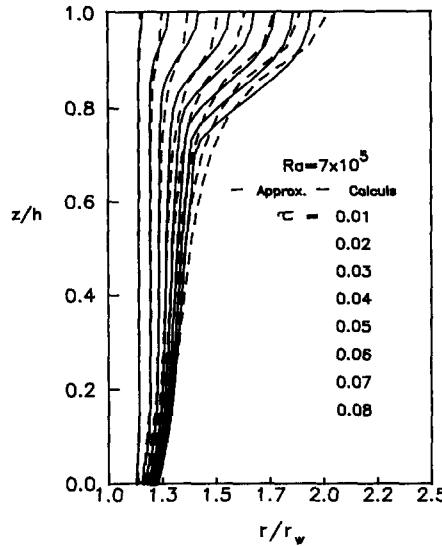


FIG. 7. Position de l'interface, $Ra = 7 \times 10^5$. Température imposée à la paroi.

approximations est important. Environ la moitié de l'écart peut être imputé à l'omission des termes en r_n , r_{nn} , $r_{\xi n}$ comme en témoigne la courbe en pointillés. L'approximation quasi-stationnaire ne prête pas beaucoup à conséquence, étant donné la faible valeur d' ε pour laquelle ont été effectués les calculs. La Fig. 7 présente les profils correspondants de l'interface liquide-solide en fonction du temps. Les profils calculés avec les approximations l'ont été pour un nombre de noeuds identique à celui de Sparrow *et al.* [10]. Une comparaison rapide avec la Fig. 3 permet de constater que les profils obtenus ici avec les approximations sont encore assez différents de ceux de Sparrow *et al.* au voisinage de la frontière adiabatique $z = h$. Cette différence laisse supposer chez eux une façon autre de traiter les conditions limites. Il est frappant de remarquer qu'une extrapolation linéaire jusqu'à la frontière, à partir des deux points au-dessous de $z = h$ sur la courbe pointillée de la Fig. 7, donnerait des

profils très semblables à ceux de Sparrow *et al.* sur la Fig. 3. On peut donc raisonnablement supposer que la différence d'approche dans le traitement des conditions limites est à l'origine de l'écart observé entre la solution avec les approximations et celle Sparrow *et al.* sur la Fig. 6.

4.2. Flux de chaleur constant

Les Figs. 8-10 présentent les résultats obtenus dans le cas d'un flux de chaleur constant imposé à $r = r_w$. Les calculs ont été effectués pour les mêmes valeurs de A , Pr , ε . Les prédictions numériques sont encore une fois indépendantes des paramètres Pr et ε , lorsque $\varepsilon < 0,15$ et $Pr > 7$. La Fig. 8 décrit l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps pour un nombre de Rayleigh allant de 7×10^6 à 7×10^8 . Ce nombre est défini dans ce cas-ci comme

$$Nu = \frac{1}{A} \int_0^A \frac{1}{\theta} \Big|_{r=1} dz. \quad (35)$$

L'allure générale des courbes demeure identique en régime conductif, où l'on enregistre encore une fois une diminution rapide du nombre de Nusselt. Ce dernier passe par un minimum en régime mixte, puis augmente par la suite. L'augmentation se fait plus rapidement pour les grands nombres de Rayleigh. Le nombre ne passe pas par un maximum relatif dans ce cas-ci avant de se stabiliser. La valeur du nombre de Nusselt en régime permanent obéit à peu de choses près à la corrélation

$$Nu = 0,175 Ra^{1/4}. \quad (36)$$

La Fig. 9 décrit l'évolution dans le temps du rapport du volume liquide au volume du cylindre. La région où les courbes se confondent correspond au régime conductif, durant lequel l'influence de la convection, et donc celle de Ra est négligeable. On remarque que la durée du régime conductif est beaucoup plus brève dans le cas du plus grand nombre de Rayleigh que pour les deux autres valeurs. Il est possible d'intégrer l'équation (3) sur le volume occupé par la phase

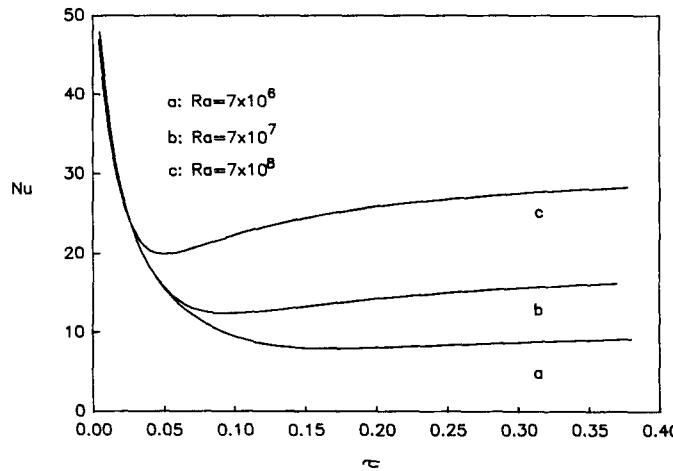


FIG. 8. Nombre de Nusselt moyen. Flux de chaleur imposé à la paroi.

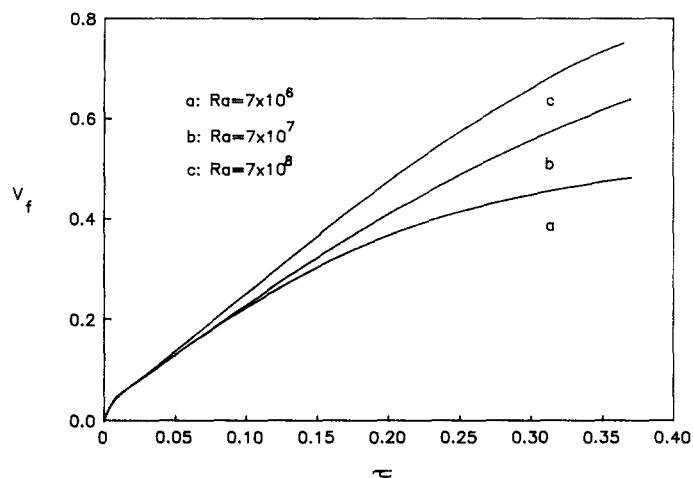
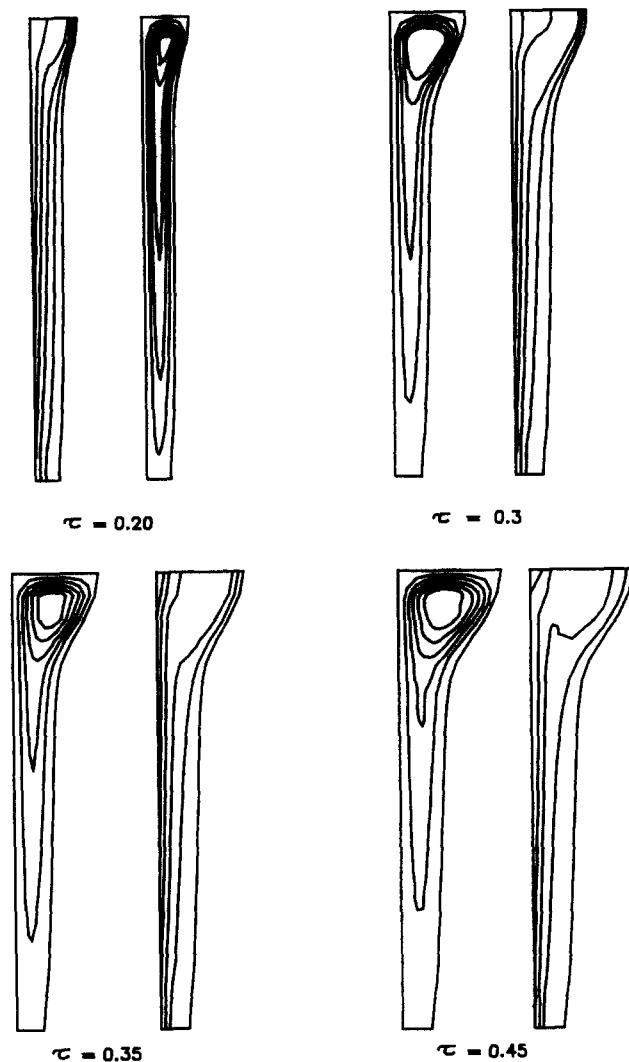


FIG. 9. Volume liquide total. Flux de chaleur imposé à la paroi.

FIG. 10. Isothermes et lignes de courant, $Ra = 7 \times 10^8$. Flux de chaleur imposé à la paroi

liquide pour obtenir après quelques manipulations simples

$$A = \epsilon \int_1^{r_w} \int_0^A \frac{\partial \theta}{\partial \tau} r \, dr \, dz + \int_0^A r_f \frac{\partial r_f}{\partial \tau} \, dz. \quad (37)$$

Pour un petit nombre de Stefan, comme c'est le cas ici, la chaleur sensible absorbée par le matériau peut être négligée devant la chaleur latente absorbée au début du changement de phase. Il n'est alors pas difficile de démontrer à partir de l'équation (37) que le volume liquide est directement proportionnel au temps écoulé pour un flux de chaleur constant, comme on peut le constater sur la Fig. 9.

La Fig. 10 présente les isothermes et les lignes de courant à différents instants pour un nombre de Rayleigh de 7×10^8 . On constate en comparant la Fig. 10 avec la Fig. 5 que la fusion du matériau se fait beaucoup plus lentement pour un flux de chaleur imposé à $r = r_w$. On remarque également que la déformation de l'interface dans le haut de la cavité est assez semblable dans les deux cas. Les lignes de courant dénotent toutefois une forte localisation de l'écoulement dans cette région, qui est presque isotherme. Il y a formation d'une couche limite à la paroi cylindrique à partir du bas de la cavité, de même qu'à l'interface liquide-solide à partir du haut de la cavité. Le coefficient de transfert de chaleur local à la paroi cylindrique diminue avec z tandis que la température augmente. En comparant les isothermes aux différentes valeurs de τ , on constate également que la température à la paroi tend à s'uniformiser avec le temps. Goldstein et Ramsey [6] avaient aussi observé cette tendance pour un cylindre horizontal.

5. CONCLUSIONS

La technique de génération du maillage de Thompson *et al.* s'avère très efficace pour traiter le problème à frontière mobile considéré ici. Les résultats obtenus pour un cylindre isotherme confirment ceux de Sparrow *et al.* dans l'ensemble. L'approximation de pente et de courbure nulles faite par ces derniers peut introduire des erreurs appréciables lorsque le nombre de Rayleigh est grand. La façon de traiter les conditions limites semble également importante. L'approximation quasi-statique par contre est sans conséquences pour de faibles nombres de Stefan. Pour le flux de chaleur constant, le nombre de Nusselt moyen se stabilise à une valeur proportionnelle à $Ra^{1/4}$, sans passer par un maximum relatif. La fusion se fait plus

lentement et l'influence de la convection reste plus confinée au haut de la cavité.

Remerciements—Ce travail a bénéficié des subventions de recherche du conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada CRSNG-A4982 et CRSNG-A626.

RÉFÉRENCES

1. C.-J. Ho and R. Viskanta, Heat transfer during melting from an isothermal vertical wall, *J. Heat Transfer* **106**, 12–19 (1984).
2. M. Okada, Analysis of heat transfer during melting from a vertical wall, *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, 2057–2066 (1984).
3. B. W. Webb and R. Viskanta, Analysis of heat transfer during melting of a pure metal from an isothermal wall, *Numer. Heat Transfer* **9**, 539–558 (1986).
4. M. Bareiss and H. Beer, Influence of natural convection on the melting process in a vertical cylindrical enclosure, *Lett. Heat Mass Transfer* **7**, 329–338 (1980).
5. E. M. Sparrow, J. W. Ramsey and R. G. Kemink, Freezing controlled by natural convection, *J. Heat Transfer* **101**, 578–584 (1979).
6. R. J. Goldstein and J. W. Ramsey, Heat transfer to a melting solid with application to thermal energy storage systems. In *Heat Transfer Studies. Festschrift for E. R. G. Eckert*, pp. 199–206. Hemisphere, New York (1979).
7. E. M. Sparrow, S. Ramadhyani and S. V. Patankar, Effect of subcooling on cylindrical melting, *J. Heat Transfer* **100**, 395–402 (1978).
8. L. S. Yao and F. F. Chen, Effects of natural convection in the melted region around a heated horizontal cylinder, *J. Heat Transfer* **102**, 667–672 (1982).
9. T. Saitoh, Numerical method for multi-dimensional freezing problems in arbitrary domains, *J. Heat Transfer* **100**, 294–299 (1978).
10. E. M. Sparrow, S. V. Patankar and S. Ramadhyani, Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region, *J. Heat Transfer* **99**, 520–526 (1977).
11. P. G. Kroeger and S. Ostrach, The solution of a two-dimensional freezing problem including convection effects in the liquid region, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 1191–1207 (1974).
12. H. Rieger, U. Projahn and H. Beer, Analysis of the heat transport mechanisms during melting around a horizontal circular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 137–147 (1982).
13. J. F. Thompson, F. C. Thames and C. W. Mastin, Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, *J. Comp. Phys.* **15**, 299–319 (1974).
14. P. D. Thomas and J. F. Middlecoff, Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations, *AIAA J.* **18**(6), 652–656 (1980).
15. P. F. Galpin and G. D. Raithby, Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the temperature-velocity coupling, *Numer. Heat Transfer* **10**, 105–129 (1986).

NUMERICAL STUDY OF MELTING AROUND A VERTICAL CYLINDER FOR TWO
BOUNDARY CONDITIONS

Abstract—Melting around a vertical circular cylinder imbedded in a solid matrix at the fusion temperature is being studied. The problem is treated for two types of boundary conditions at the wall assuming constant thermal properties. Governing equations for heat and fluid flow in the melted region are solved using computer-generated, body-fitted curvilinear coordinates. The effect of some simplifying assumptions is examined and numerical predictions are obtained for Rayleigh numbers up to $Ra = 7 \times 10^5$ for a constant temperature and $Ra = 7 \times 10^8$ for a constant heat flux. The results obtained for a Stefan number of $\varepsilon = 0.15$ and a Prandtl number of $Pr = 7$ are virtually independent of these two parameters when $\varepsilon < 0.15$ and $Pr > 7$. For a constant heat flux, the average steady-state Nusselt number is proportional to $Ra^{1/4}$ and melting occurs more slowly than for a constant temperature.

NUMERISCHE UNTERSUCHUNG DES SCHMELZENS UM EINEM VERTIKALEN
ZYLINDER FÜR ZWEI RANDBEDINGUNGEN

Zusammenfassung—Schmelzvorgänge an einem vertikalen Zylinder, der in einem festen Gefüge bei Schmelztemperatur eingebettet ist, werden untersucht. Der Vorgang wird für zwei Arten von Randbedingungen an der Wand betrachtet, wobei konstante Stoffwerte angenommen werden. Die Gleichungen für Wärme- und Fluidströmung im geschmolzenen Bereich werden unter Benutzung computerberechneter, körperangepaßter Koordinaten gelöst. Die Auswirkung einiger vereinfachender Annahmen wird gezeigt. Bei konstanter Temperatur werden numerische Ergebnisse für Rayleigh-Zahlen $Ra > 7 \times 10^5$ und bei konstantem Wärmestrom für $Ra > 7 \times 10^8$ erhalten. Die Ergebnisse für die Stefan-Zahl $\varepsilon = 0,15$ und die Prandtl-Zahl $Pr = 7$ bleiben im wesentlichen unverändert, wenn $\varepsilon < 0,15$ und $Pr > 7$ wird. Bei konstantem Wärmestrom ist die mittlere stationäre Nusselt-Zahl proportional zu $Ra^{1/4}$, und Schmelzen tritt langsamer auf als bei konstanter Temperatur.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА
ДЛЯ ДВУХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Аннотация—Исследуется плавление вокруг вертикального круглого цилиндра, помещенного при температуре плавления в твердую матрицу. Задача рассматривается для двух типов граничных условий на стенке в предположении постоянства тепловых характеристик. С помощью рассчитываемых на машине криволинейных координат, приспособленных к исследуемому телу, решены основные уравнения теплообмена и динамики жидкости в зоне расплава. Рассмотрено влияние некоторых упрощающих предположений и проведены численные расчеты для значений числа Рэлея до $Ra = 7 \times 10^5$ при постоянной температуре и $Ra = 7 \times 10^8$ при постоянной плотности теплового потока. Результаты, полученные для значений числа Стефана $\varepsilon = 0,15$ и числа Прандтля $Pr = 7$, фактически не зависят от этих двух параметров при $\varepsilon < 0,15$ и $Pr > 7$. В случае постоянной плотности теплового потока среднее стационарное значение числа Нуссельта пропорционально $Ra^{1/4}$ и плавление происходит медленнее, чем при постоянной температуре.